数学与生活

（修订版）

スウガク ニュウモン

Sugaku Nyumon

［日］远山启 著

吕砚山 李诵雪 马杰 莫德举 译

TURING 图灵新知

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

数学与生活：修订版 /（日）远山启著；吕砚山等译. -- 2版. -- 北京：人民邮电出版社，2014.10
（图灵新知）
ISBN 978-7-115-37062-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①远… ②吕… Ⅲ. ①数学—普及读物 Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第212736号

内 容 提 要

本书以生动有趣的文字，系统地介绍了从数的产生到微分方程的全部数学知识，包括初等数学和高等数学两方面内容之精华。这些知识是人们今后从事各种活动所必须的。书中为广大读者着想，避开了专用术语，力求结合日常逻辑来介绍数学。读来引人入胜，无枯燥之感。从中不但可得益于数学，而且还可学到不少物理、化学、天文、地理等方面的知识。

◆ 著　　　[日] 远山启
译　　　吕砚山　李诵雪　马　杰　莫德举
策划编辑　武晓宇
责任编辑　乐　馨
装帧设计　broussaille私制
责任印制　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京　　　　印刷

◆ 开本：880×1230　1/32
印张：13.125
字数：416千字　　　　2014年10月第2版
印数：9 001 – 13 000册　　　　2014年10月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2010-4232号

定价：42.00元

译者序

本书的中译本曾以《通俗数学》为名于1988年由北京科技出版社出版。当时是根据日本遠山啓所著《数学入门》的上册第35次印刷和下册第28次印刷的版本翻译的。20多年来，该书以内容适当、通俗易懂的特色而深受读者欢迎，历久不衰。

根据广大读者的需要，这次是由人民邮电出版社得到日本岩波书店的授权，根据原书的第75次印刷（上册）和第66次印刷（下册）的版本翻译。应约参加这次翻译工作的是：吕砚山（前言、后记、第2～5章以及第11～14章）、马杰（第1，7，8章）、莫德举（第6，9，10章）。全书最后由吕砚山审阅。

这是一本十分生动有趣的数学读物。它以新颖的形式，系统而全面地介绍了数学基本知识。内容从数的产生开始，讲到微分方程为止，既包含了算术、代数、三角、几何等初等数学的内容，又包含了微分、积分、微分方程等高等数学的内容。作者认为，书中选取的这些知识乃是新世纪人们顺应社会发展、从事各种活动所必须了解或掌握的知识。

能够将如此丰富而全面的内容，巧妙地加以编排，由浅入深地介绍在这样一本篇幅不大的著作中，反映出作者在取材上贯彻了少而精的精神。无疑，这样处理是切合时宜、极受广大读者尤其是初学者欢迎的。

本书的一个显著特点是，在讲述方法上力求脱开专用术语，从日常逻辑中来引出并介绍数学。作者运用了丰富的社会科学和自然科学方面的知识，结合日常生活和古今各国脍炙人口的故事，夹叙夹议，妙笔横生。读来犹如是在读一本有趣的故事集，而没有通常会产生的那种枯燥抽象之感。读者从中不但受益于数学本身，而且也能学到不少有关物理、化学、天文、地理乃至音乐、美术等方面的知识。

至于条理分明、图文并茂，更不待言。总之，不论从内容还是从形式来看，本书读者对象可谓老少皆宜。因此，它在日本深受欢迎，自1959年出版面世迄今已印刷六七十次就是一个证明。我们期望，本书

中译本能够继续为我国读者学习和掌握数学知识提供有益的帮助。

最后需要说明的是，前面所说的本书中译本《通俗数学》是由吕砚山、李诵雪、马杰、莫德举四人共同翻译的。其中李诵雪翻译了第 2，3，4，5，13，14 章。依托坚实的基础理论修养，运用流畅的文笔，她的译文完整准确，通俗易懂，极受读者青睐。遗憾的是，她已于 1989 年病逝，没有能参加这次翻译工作，但她所译的这六章译文除个别文字改动外，仍为本书采用。另外，《通俗数学》的责任编辑杨福成在确定选题、书稿加工及出版等方面都做了大量工作，为该书面世作出了贡献，可惜也已病逝。在本书出版之际，我们以怀念的心情向他们深表敬意。

限于水平，书中谬误欠妥之处难免，敬请读者批评指正。

译　者

2010 年 6 月于北京化工大学

前　　言

从前，数学的应用曾经局限在一些特殊的人们之间。对于多数人来说，数学仅仅是作为考试及格的必要科目，而在毕业以后则嫌其无用很快就全忘光了。

可是近来情况有所变化，在各种场合都开始运用数学了。不用说自然科学或技术方面离不开数学，即使在经济、政治方面也离不开数学。至于在企业的经营管理、商品的销售上，为了能更有发展，数学的作用就更大了。对于不爱学数学的人来说，诚然将数学视为世上难学之事物，但若不学数学，日子也并不会好过。这是对于过去的那种不从事政治、经济活动的人来说的。至于当今世界将向何处去，虽仍是专家们在研究的问题，但毫无疑问，人类生活将会逐渐地走向集体化和社会化。因而，数学的活跃时代也就来到了。

在20世纪后半叶，数学也许会获得从未有过的广泛应用。不过，这样的时代已经开始了。掌握一定程度的数学知识，是今后在世界上生存不可缺少的条件。

没有必要要求任何人都具备很高的数学水准。对于20世纪后半叶在世界上从事各种活动的日本人来说，本人认为可以按“到微分方程为止”这样来划线。

确实，如果能把“到微分方程为止”这样的数学知识变成日本人的常识，这将是非常理想的。

这就是写这本入门书的基本目的。

对于读者的希望首先是，在学习数学时，应抛弃那种认为必须具备特殊条件的成见。和其他科学一样，数学也不是某些专人所臆造出来的，而是如漱石所言，是“左邻右舍众多的人累积思考而成”的。

在数学中运用的逻辑与日常生活中表现的逻辑并无二致，而是其精练出的一部分。笛卡儿说过：“世上的准则在于最公平的分配。”从数学角度来考虑，也是除了共同遵守的准则以外，别无其他。因此，为了学

好数学，无论是谁都要具备的共识就是必须有毅力。毅力之所以重要，是因为数学学识是靠循序渐近、逐步累积得来的，不可能一蹴而就。无论如何，事先要下定一步一步迈进的决心。

因此，本书脱开众所周知的那些术语的圈子，力求从日常的逻辑中引出数学的道理。

为此，也将过去曾用过的一些专门术语改变成容易学的日常用语，如将分数的约分当作“折叠”来处理就是一例。由此看来，也许这是一本很有人情味的“数学入门”书。

远山启

1959 年 10 月

目　　录

第 1 章　数的幼年期

1.1　从未开化到文明

有一位数学家接受手术。在开始手术前，外科医生让这位数学家闻麻醉药，并且叫他数 1，2，3，…。这位数学家要是在平时，别说是 1，2，3，…，就是极大或是极小的数也都能随心所欲地数出来，可是他却抵抗不住麻醉药，数 1，2 还可以，数到 3 就人事不知了。一滴氯仿就把数学家带回到只能数到 3 的未开化人的状态去了。

用一滴麻醉药，就能把数学家带回到未开化人的世界去，但是反过来，从未开化人变成数学家的道路可就漫长而又遥远了。不仅仅是漫长，那还是一条极其曲折的道路呢。为了看清数学这门学问的本来面目，我们有必要回到起始点，在这条曲折的道路上再走一遍。

精神病医生为了试验病人的神智是否清楚，好像就是让病人数数的。据说从前在泰国的法庭上也是让证人数到 10，如果数不上来，就没有资格作为一名证人。但如果根据这件事就想说“数学是智能的检验标准”的话，一定会有许多人瞪着眼反对。这是因为在这个世界上有许多人讨厌数学。

与喜欢数学的柏拉图不一样，讨厌数学的索克拉提斯说：“在数学家当中，没有人能够作认真的推论。”另外，还有很多人公然说数学这种东西是有害无益的。

可是，喜欢、讨厌姑且不说，既然生活在现代，没有数这个东西就不能生活下去。其实只要想一下在每天的报纸上出现多少数字就明白了。所以，即使是讨厌数学、对计算觉得棘手的人，实际上也是懂得相当多的数学、很会应用数学的人。站在未开化人当中，就是第一流的数学家了。

即使说数学不行或者讨厌数学，也并不意味着这个人的智能或人品

不好。可是要在现代社会生活下去，不用说，会有很多不便之处。一看见数字就头痛的人，跟一坐车就晕车的人是一样的吧。

1.2 数的黎明

从前——距现在大约 50 万年，在现在北京郊外周口店的洞穴里，居住着人类的祖先北京猿人。从他们遗留下来的石器和动物的骨骼，可以大致知道他们从事什么样的劳动，吃什么样的食物。但是要推测他们懂什么数学就非常困难了。为什么呢？因为数这个东西是无形的，没有一种直接了解的线索。

但这并不是说就没有一种间接的线索，去了解人类在太古时期如何建立数字或图形的知识。这线索就是考察在文明进步中遗留下来的未开化人的数学，另外就是观察在幼儿当中，数的概念是怎样建立的。

首先产生的问题是，除了人类以外是否真有动物了解数？就像经济学家亚当·斯密说的那样："数是人类在精神上制造出来的最抽象的概念。"确实，即使像 1，2 这样最简单的数，要是和其他语言相比较，也是很抽象的，除了人之外，其他动物好像还没有知道数的。

然而有人认为鸟知道数。例如，杜鹃悄悄把自己的蛋产到黄莺的巢里，让黄莺替它孵蛋，它会把和自己的蛋数相同的黄莺蛋去掉。从这个事实来看，人们自然会产生这样的疑问：鸟不是会数数吗？德国的动物学家奥·凯拉作了鸟能数到什么程度的试验。但是以往这种试验，由于准备不充分，结果难以信赖。从前也曾有过这样奇怪的事情——马戏团的马因为会计算而闻名，可仔细研究一下就知道，是马的主人在不知不觉中送出一个什么信号，然后敏感的马回应了这个信号。

凯拉为了防止一些杂音混进来，小鸟放到一个院子里，让小鸟和实验者彼此都看不见，小鸟的动作用照相机自动拍下来。

实验对象就是乌鸦和鹦鹉。在鸟的前面放五个箱子（见图 1-1），箱子盖上画着标记点，分别是 2，3，4，5，6。箱子前面也放着画有标记点的盖子。预先让鸟作挑出与盖子上标记点相同的箱子的练习。经过充分练习之后，再让鸟作挑出同样数目的试验时，鸟能够出色地取得成功。而且即使把五个箱子的排列方法作各种变化或改变标记点的画法，

也不会失败。

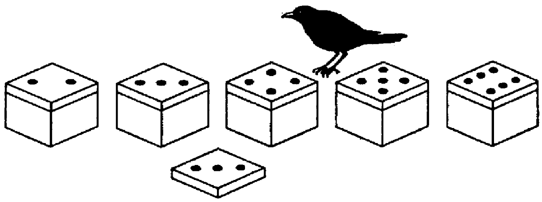


图　1-1

上面的试验是让鸟同时认标记点的个数。接着又作了按时间顺序数数的试验，先让乌鸦作这个练习，就是从许多食饵中按特定的数，例如取 5 个食饵来吃。取食的时候，摆好几个内部装有食饵的小箱，而顺序放入这些小箱里的食饵的数量是 1，2，1，0，1，…。这个试验就是把箱子打开，让鸟只吃 5 个食饵。当吃的食饵少于 5 个时，就必定让乌鸦回笼子去。

这样一来，就会有惊人的事情发生。当鸟吃完装有一个食饵的第 1 箱以后，它就点一下头（见图 1-2），吃完装有两个食饵的第 2 箱以后就点两下头，第 3 箱吃完点一下头，对空着的第 4 箱就不闻不问地跳过去，到吃完第 5 箱之后又点一下头，然后，据说脸上好像是“我吃完了”的样子，对第 6 箱不予理睬就离开了。

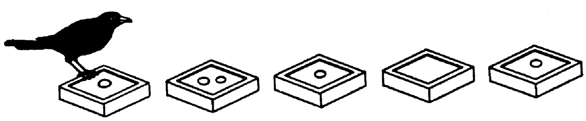


图　1-2

点头的次数就是箱子里的食饵数，也许这是乌鸦预先记住食饵的数目，知道是不是够数吧。从这样的试验来看，会数数的不仅是人呢。我们人类的优越感就只好化为乌有了。

但是只凭这一点就断定鸟类知道数似乎还早了一些。为什么呢？这是因为要说知道数，必须有几个条件。我们看看这些条件吧。

1.3 一一对应

英国的数理哲学家巴特兰多·拉赛尔说："要觉察到两天的 2 和两只雏鸡的 2 是同样的 2，需要有无限长的岁月。"确实像拉赛尔说的那样，2 这个数对于两个鸡蛋、两条狗、两个人、两只鸟、两本书都是共同的，所以即使把两个鸡蛋换成两棵树，2 还是有没有变化（见图 1-3）。

像这样把一个一个的鸡蛋和一棵一棵的树联系起来就叫做一一对应。但即使一一对应起来，2 还是不变的。我们利用一一对应而数不变的这件事，就想出一种用容易数的东西来替换不容易数的东西。据说丰臣秀吉为了数山上的树木，就在每棵树上系一根绳头儿，然后再数这些绳头儿。这就是把树的集合以一一对应的方法转换为绳头儿的集合，然后再数。另外，根据一位旅行家的手记，说在马达加斯加岛，为了数有多少士兵，让每一名士兵走过队长面前时，投下一粒石子，然后数那堆石子。这也是因为士兵的集合与小石子的集合是一一对应的。寿司店在顾客每吃一个寿司饭团时，就在柜台上粘一个饭粒，以此来数吃过的寿司饭团数，这也是利用了一一对应而数不变的原则。

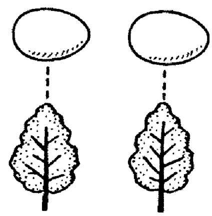


图 1-3

可是杜鹃知道这件事吗？它即使能找到与自己的蛋数相同的黄莺的蛋，那也是因为这两种蛋很相像吧。它似乎不会想到 3 个蛋与 3 棵树是同样的 3。

不仅是鸟，很小的孩子好像也不知道这事。瑞士的心理学家皮亚杰做了以下的实验。把几个花瓶和一些花给一个 5 岁零 8 个月的孩子，让他在每一个花瓶里插一枝花。接着再把花拢在一起，问他是花多还是花瓶多，孩子回答说是花瓶多，因为把花拢在一起，能看见的少了（见图 1-4）。把花一枝一枝地插在花瓶里就是一一对应的事，可是这个孩子却想不到花瓶与花的数目是相等的。我们必须认为这个孩子对于一一对应而数不变的事还不明白。如果人在孩提时代还不懂数是一一对应

而不变的话，那么鸟或者蜜蜂就更不懂了吧。

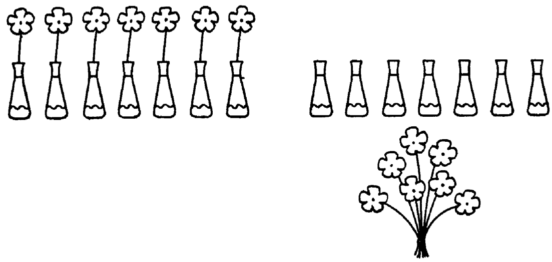


图 1-4

1.4 分割而不变

和把蛋换成完全不相同的树枝不一样，我们知道“把某个集合分成两个部分或更多时，其总数仍不变”，这是知道数的第二个条件。这是因为把装在一个容器里的玻璃球移到形状不同的另一个容器中时，其数目是不变的。

即使再分到两个容器里，总数还是不变的。这也是皮亚杰的实验，四五岁左右的孩子好像不明白虽然分割而数不变的原则。让五岁半的孩子把一个容器里装的玻璃球分装到两个容器时，孩子说玻璃球比原来多了。这大概是因为孩子被两个容器迷惑了。

据说，开始知道不论分割还是合并，玻璃球的总数是不变的这件事，是在孩子 6 岁到 7 岁左右。

第三个条件是“即使改变计数的顺序，数也不变”。

盘子里放着玻璃球，不论以什么顺序来数，答案都是一样的。7 个人的家庭，按年龄顺序从祖父、父、母……数起是 7 个人，从最小的孩子开始数也是 7 个人。也就是说，不论怎样改变计数顺序，数是相同的。

据说很小的孩子也不知道这一点。把两种东西的集合按照某种顺序一一对应时，要是把其中一种集合的顺序打乱，孩子就会奇怪为什么数还是一样的。

下面这种抽签方法就是利用了这一事实。这个抽签是给 A，B，C，

D 四个人标上 1，2，3，4 号。首先在 A，B，C，D 与 1，2，3，4 之间各连一条直线。在直线之间随意画上一些横线（见图 1-5）。预先规定好，碰到横线和竖线的交点就必须向下或向左右拐弯。A 和 B 之间画一条横线就改变了 A 和 B 的顺序。横线虽然起到交换两个文字的作用，可是文字的总数绝不会变，所以用不着担心从 A 出发的人没有地方可去。4 这个数不会因顺序的交替而变化。当然这不仅是 4，100 也好，1000 也好，都是同样的。这样用一一对应来替换、分割或改变顺序而不变的东西就是数。

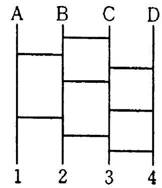


图　1-5

1.5　数的语言

假设搞清楚了数的一一对应，就能知道分割、改变顺序时数是不变的，就是知道了数，也就没有必要另外去了解数的语言了。即便能说出一个大数，也就是掌握了数词，也未必能说明一个民族的数的思想就很发达。通古岛居民掌握了 10 万以内的数词，但文明程度却极为低下，他们还不知道数的一一对应，也不知道分割或改变顺序时数是不变的。幼儿也能够机械地数到 100 或数到 1000，但仅仅这些还不能说是很清楚地具备了数的思想。

但是，以上这些实属例外。一般来说，文明程度低下的种族掌握的数词也都是很小的数。

一个极端的例子就是南美玻利维亚的契基特族，他们只知道相当于 1 的数词叫“埃塔玛”。当然，即使是契基特族的“埃塔玛”，也可以运用到一个人、一支枪或一条狗。与不会语言的动物来比，已经是天壤之别了。

还有，在亚马孙河流域的洋柯族也是把 2 这样一个数词说成是“波埃塔拉林科阿洛阿库”，这是由于使用 2 这个数的机会不多，所以流传下来这么长的数词。如果经常使用 2，就一定会用个更为简单的数词。

1.6 数词的发展

即使是未开化人，像契基特族或洋柯族那样也是极少见的，要是生活水平稍微提高一点，就会掌握更多的数词。

例如，英属新几内亚的比由基莱族就掌握了以下的数词：

1——塔兰杰萨	6——格本
2——米塔·基那	7——托兰库金贝
3——格基米塔	8——佰达依
4——托潘	9——恩格玛
5——曼达	10——达拉

据说这些都是身体各部分的名称。把数和身体各部分联系起来进行计数，用这种方法可以数到几百，可是要记住它们决不是件容易事，那就得过度使用记忆力了。

面对这种困难，人们就想到不是一个一个地给数命名，而是把一定的数归纳成一束来命名的方法。最初出现的好像是每两个数归成一束，这就是二进制的萌芽，它的原产地却是人们称之为最落后的未开化状态的澳大利亚大陆。

研究一下澳大利亚波特玛凯地方的方言，就是

1——瓦尔布尔

2——布莱拉

3——布莱拉·瓦尔布尔

把 3 说成是布莱拉·瓦尔布尔（2＋1），所以我们可以知道这就是把 2 归成一束。维因梅拉地方的数词更先进一些，那是

1——凯亚布

2——波立特

3——波立特·凯亚布（2＋1）

4——波立特·波立特（2＋2）

这些例子确实都包含着“逢 2 归 1”的非凡的想法。但这是有意识地做的呢，还是因为想节约数词而歪打正着的呢，就不得而知了。当然节约是数学的重要想法之一，这是事实。

若把“归束计数”的想法作为数学史的起点，二进制也仍然是最幼稚的数词，除澳大利亚之外是极少见的。当然，现代的文明国家里也没有一个国家使用二进制。

但是，如果有人不屑地认为二进制是完全不足取的计算法，那就有点过早地下结论了，这是因为最新式的电子计算机都在使用二进制。即使是用十几个小时就能把圆周率 3.141 59…的值计算到 2000 位数的大型电子计算机，也是把十进制的数字翻译成二进制之后再计算的。

二进制在历史上的各个时期曾经多次出现过。中国古代的《易经》也是基于阴阳两种东西的对立，自然也与二进制有关系。

此外，在发掘古代印度河流域的繁荣都市时，据说从宝石商店的遗址和类似的地方发现了以 1，2，4，8，16，32，64 为重量比例的砝码。这些也都清楚地说明了古人曾经使用过二进制。

热心主张二进制的人，就是那位伟大的哲学家、数学家莱布尼茨(1646—1716)。

根据二进制，所有的数都可以用 0，1 两个数字来写。例如下面这些数

1——1

2——10

3——11

4——100

5——101

…

莱布尼茨似乎注意到这件事。因为他认为 1 象征神，0 象征虚无，是神和虚无创造了整个宇宙。他把自己的空想写了下来，送给当时派遣到中国的杰西特派的传教士，并叫他交给中国的皇帝，劝中国皇帝改信仰为基督教。

二进制之所以用在电子计算机上，就是基于电流有“流”与“不流”的两种情况。

电子计算机的原理很简单，可以说是一个珠的算盘。但是用不着重新制造一个珠的算盘，只要利用普通算盘的上珠就可以了，38 用二进制来写就是 100 110，这一个珠的算盘就是如图 1-6所示的样子。

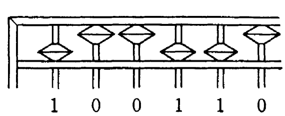


图 1-6

二进制的加法极其简单：

$$\begin{array}{r}0\\+\ 0\\\hline 0\end{array}\qquad\begin{array}{r}1\\+\ 0\\\hline 1\end{array}\qquad\begin{array}{r}0\\+\ 1\\\hline 1\end{array}\qquad\begin{array}{r}1\\+\ 1\\\hline 10\end{array}$$

记住以上四种情况，把它们加以组合，什么样的加法都可以。例如：

$$\begin{array}{r}45\\+\ 23\\\hline 68\end{array}\ \begin{array}{c}\cdots\\\cdots\\\cdots\end{array}\ \begin{array}{r}101101\\+\ 10111\\\hline 1000100\end{array}$$

进位的计算本来很简单，但在二进制里却是非常之多，这也没有办法。

乘法的“九九表”也极简单，只不过是

$$\begin{array}{r}0\\\times\ 0\\\hline 0\end{array}\qquad\begin{array}{r}1\\\times\ 0\\\hline 0\end{array}\qquad\begin{array}{r}0\\\times\ 1\\\hline 0\end{array}\qquad\begin{array}{r}1\\\times\ 1\\\hline 1\end{array}$$

写成表格，就是表 1-1。

全部只有四个。对于懒得记忆的人来说，二进制是最合适的算法了。

表 1-1

	0	1
0	0	0
1	0	1

“20 门”的原理[①]就是二进制的一个例子。这个游戏就是重复 20 次“是”和“不是”来猜中一件事。如果把“是”作为 1，“不是”作为 0，就可以翻译成二进制的语言。要用二进制来猜对 20 位数，只要把是 0 还是 1 的问题重复 20 次就可以。所以“20 门”在数学上是和猜中 20 位的数一样。开始时有一个还不知道的 20 位数。对于每一问，就可以知道一位数字，是 0 还是 1（见图 1-7）。

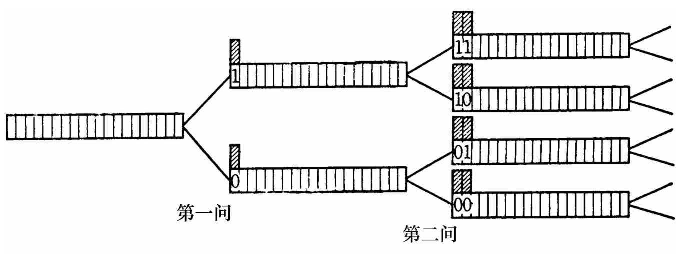


图 1-7

① 一种游戏名。——译者注

这样做下去，就可以区别出全部 2^{20}，也就是 20 个 2 相乘的数。

$$2^{20}=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=1\ 048\ 576$$

总之是 100 万以上。我们就可以知道有时出乎意料地猜中“20 门”也并不是很难。

1.7　手指计数器

二进制是人类发现手指是出色的计算器之前的产物，在这个大发现之前人类也许做过各种试验。例如，还有迹象表明出现过以三个为一束来计数的三进制。在澳大利亚的一种方言当中有以下数词：

1——卡尔布恩

2——沃姆布拉

3——库洛穆恩达

4——库洛穆恩达・卡尔布恩（3＋1）

这可以说是三进制的萌芽了。

四进制在英属哥伦比亚的居民当中似乎比较多，说这是根据去掉拇指剩下的手指数来的。若是那样的话，也许就是人们开始注意到手指的证据。此外也有报告说，在爪哇的山地居住的巽他族中还保留有六进制。

然而在进行了各种尝试之后，人们好不容易找到的仍然是手指和脚趾。使用能够自由屈伸的手指制造工具，这就使人和猴子进化成截然不同的结果。与此相同，在数学的发展上，手指也起了重要的作用。在五进制的基础上还产生了十进制和二十进制。

如果把澳洲大陆作为二进制的世界，那么非洲大陆就可以说是五进制的世界。例如，非洲的一个种族使用以下的数词：

1——布尔	6——曼・布尔（5＋1）
2——琴	7——曼・琴（5＋2）
3——拉	8——曼・拉（5＋3）
4——休尔	9——曼・休尔（5＋4）
5——曼	10——沃恩

从这个表可以看出数词是以 5（曼）为基础组合成的。

如果一只手表示 5，两只手表示 10，双手双脚就可以表示 20，这样就产生了十进制和二十进制。

据说在南美奥里诺科河附近居住的玛依布鲁民族使用以下意义的数词：

5——单手	巴比塔埃里·卡比契
10——双手	阿巴努美里·卡比契
20——1 人	巴比塔·卡莫奈埃
40——2 人	阿巴努美·卡莫奈埃
60——3 人	阿培契帕·卡莫奈埃

因为双手双脚加起来是 20，可以用来计数一个人。把 20 说成一人好像是在未开化人当中广泛使用的。

在美拉尼西亚的梅莱种族的地方，有位传教士曾经翻译过圣经。在翻译到约翰传第 5 章时有这样的句子：

“这里有个病了 38 年的人，耶稣看见他在躺着，知道他已经这样过了很久，就对他说……”

据说他在翻译 38 这个数词时，必须用“一人（20）加两手（10）加 5 加 3”来表示。因为 38 确实是等于 20＋10＋5＋3。可是不管怎么说，把手指当作永远带在身上的计数器来利用，是数的发展史上一个重要的阶段。

就像除了 1 日元、10 日元、100 日元以外，还有 5 日元、50 日元、500 日元的货币一样，所有使用十进制的国家也往往都以 5 作为辅助单位。在罗马数字中，V 表示 5，L 表示 50，D 表示 500。在但丁的《神曲》中，有一句是“到那时，神派遣的一个五百加十加五，一定会把那个盗贼和与它一起犯罪的巨人都杀死”。就这么读的话，谁也不懂是什么意思。然而五百是 D，十是 X，五是 V，所以是 DXV。据说这是拉丁语“首领”的意思。这也是罗马数字中五进制的痕迹。

1.8 金 字 塔

1798 年初夏，拿破仑率领军队远征埃及。在金字塔下，即将作战的时候，他向士兵们喊出了一句很得意的话：

“诸位，4000 年保佑着你们！”

在战斗的间隙，部下的将军们登上了著名的金字塔，拿破仑没有上去，却在下面忙着计算什么。据说拿破仑这个人很喜欢计算，在打仗的时候也使用数学。在力学上把物体的质量与速度相乘叫做动量，他就仿照这个例子，把部队的人数和移动速度相乘的结果作为部队的动量来计算。骑兵部队的人数虽然少，可是移动速度快，所以动量也就大。

且说那些将军们从金字塔上下来时，拿破仑就把刚才计算的结果说给他们听。

他说把三座金字塔（见图 1-8）的石头全部合起来，可以筑成高 6 米、厚 30 厘米围绕全法国的石墙。拿破仑的计算是否准确姑且不说，仅仅听这句话我们也可以估量出金字塔是怎样一个庞然大物了。

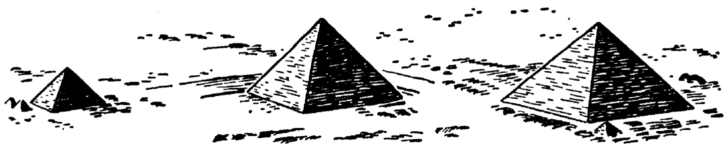


图 1-8

为了建造这些金字塔，花费了多少人力和血汗，实在是难以想象。

然而金字塔的惊人之处，不仅是它的巨大。当仰望这个高达 150 米的巨大的石山，最初所感到的惊异平静下来之后，紧接着第二个惊异就会抓住人心，那就是金字塔所具有的精巧。这个巨大的石山不仅是大，而且还像工艺品那样精巧。

比如说金字塔的底边是正方形，边长的误差在 1/1000 以下。距今 4000 年以前怎么会有这样精巧的建筑物呢？一想到这里，就知道问题在于古代埃及的测量术及它的基础——数学。我们自然会想到制造出这样精密的建筑是要有高水平的数学知识作保证的。当然，仅凭螺壳的曲线在微分学里是精密的曲线，就说贝类懂得微分学，这个结论是错误的。但是人类从事的是有计划的工作，自然可以假定在它的背后有适应这个工作的科学存在。

在 19 世纪，香波里昂等开始的埃及研究就明确了这些假定是事实。

例如，根据英国学者林德所发现的《莱因德纸草书》上的记载，当时埃及的数字如图 1-9 来表示。

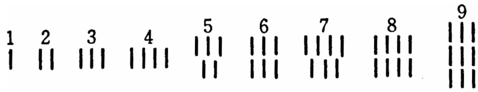


图 1-9

相当于 10，100，1000…的数字如图 1-10。

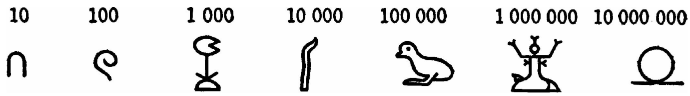


图 1-10

这样的数字达到了 1000 万，说明埃及这个古国一定需要这个庞大的数字。根据流传下来的记录，在一次战争中，埃及分得了 12 万俘虏、40 万头牛和 142.2 万头山羊。这个数字即使多少有些夸张，可是对一个拥有大量人口、处于高度统治下的古代国家来说，这种程度的数字决不是难以实现的大数吧。

埃及人使用象形文字来写数字，比如 13545，这个数字的写法如图 1-11 所示。

图 1-11

这是从左到右按大小顺序写的，写的顺序反过来也可以。另外，要是把和换位置写也还是 13545 不变（见图 1-12）。也就是与各个数字的书写顺序（即定位）没有关系。所以埃及的数字跟定位的原理不一样，我们今天用的定位法是从与埃及数字不同的巴比伦王国系统产生的。

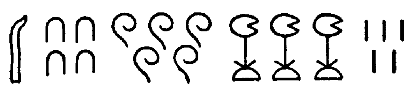


图 1-12

1.9 二十进制

如果以一个人的手指和脚趾数为基础，就能产生二十进制。这个二十进制和十进制并列，在今天的欧洲语言，特别是在法语里留下了痕迹，在法语里现在还有这种说法：

80——quatre vingts（4 个 20）

90——quatre vingt dix（4 个 20 加 10）

从前是用以下十进制的数词

80——octante

90——nonante

却特意变为使用 20（vingt）的二十进制，可以看出法国人相当喜欢二十进制。雨果的著作里有名为《93 年》的小说，那就是 Quatre vingt treize（20×4＋13＝93），这对日本人来说是需要心算一下的问题。确实，这种二十进制不是面向孩子的算术，所以近来在小学里停止使用 vingt，把 quatre vingts 代之以 octante，把 quatre vingt dix 代之以 nonante，推荐使用这些合理的数词。

但是据说现在在农村有些地方还是像从前那样使用 octante 和 nonante。

不仅是法语，英语里也保留着 score（20）这样的数词，也把“人生 70”说成 Three score and ten（20×3＋10＝70）。林肯在葛底斯堡以那句名言“人民的，依靠人民的，为了人民的政府”结尾的演说中，是以 Four score and seven years ago 这句话开始的，由于 20×4＋7＝87，所以意思就是“87 年前”。

可是，法语也好，英语也好，20 只是 10 的辅助，认真完成二十进制的民族也有，例如阿伊努人就是。阿伊努语的 20 是 hot“一齐”，意思就是两手（指）和两脚（趾）全加在一块儿。

10——wanpe

20——hot

30——wanpe-e-tu-hot（20×2－10）

40——tu-hot（20×2）

50——wanpe-e-re-hot（20×3－10）

…

别的地方不大有这样用减法的。

除了阿伊努人以外，可别忘了还有一个民族创造了完全的二十进制，那就是中美洲的玛雅族和墨西哥的阿兹特克族。玛雅族的数字如图1-13 所示。

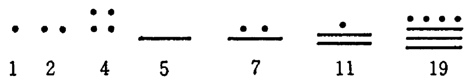


图 1-13

到了 20，就在·的下面画上，用来表示。

这时的形状就好像是眼睛，可是下一档不是 20 而是 18，不是 400 而是 360。

这似乎和一年的天数有关系，作为 360 天来说，剩下的 5 天就是祭日了。

玛雅族使用的是先进的定位方法，可是后来出现的阿兹特克族却从定位法后退了，他们使用的是如图 1-14 所示的数字。

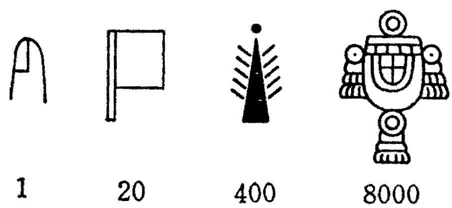


图 1-14

20 是一面旗子，但 20 这个单位好像还太大，于是把 20 分成四等份，把 10 或 15 当作辅助单位使用，如图 1-15 所示。

阿兹特克族的二十进制是很彻底的。他们和玛雅族一样，一个月是 20 天，一年是 18 个月，20 个部落聚在一起形成一个大部落。

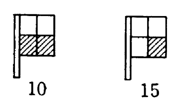


图 1-15

1.10 十二进制

人有 5 个手指，基于这样一个生物学的偶然事实，5，10 或 20 就成为计算方法的基础。旧约圣经里说有一个手脚都有 6 个指头、总共有 24 个指头的巨人和大卫王打仗的事，如果是这个 6 指巨人创造数词，一定是十二进制。

实际上也有人不用十进制而改用十二进制。第一个有名的例子，据说就是瑞典国王查理十二世（1682—1718）。他率领军队窜扰北欧。这个外号叫“北方的狂人”的好战国王很年轻就死去了，没有能实行十二进制。这样一个豪强的国王，为什么执意要搞十二进制呢？其理由还不太清楚，不仅因为“十二世”的十二，还一定有更合理的理由。首先想到的是 12 的约数很多这一事实。10 的约数有 4 个：1，2，5，10。与此相比较，12 的约数是 1，2，3，4，6，12，有 6 个。尤其是 10 不能用 3 除尽，而 12 却能用 3 除尽，这就是它的长处。

在学者当中提倡十二进制的人是博物学家布封（1707—1788）。十二进制除了 0～9 的数字外，还必须有表示 10 和 11 的数字，布封用 X 表示 10，用 Z 表示 11。加上这两个数字就可以用与十进制相同的方法写出所有的数字。布封的生年 1707 可以写成 ZX3，卒年 1788 就可以写成 1050。

可是即使有查理十二世的权力和布封的博学，也不能把十二进制强加在国民头上。这是因为必须改变数词，而这一点很难办到。

话虽这么说，现在欧洲的语言和习惯上仍然保留有十二进制的痕迹。英国小学的算术教科书里印有 12×12＝144 的十二进制的“九九”表，可是这对英国的孩子有必要吗？比如 12 个是 1 打，12 打是 1 罗。在度量衡上也是以 12 进位的居多。12 英寸是 1 英尺，12 便士是 1 先令。英语的数词也是从 one、two 开始说到 ten，11 不是 ten-one，12 不是 ten-two，而是 eleven 和 twelve。追溯到最古老的词源，eleven 是从哥特语的 ainlif（余 1）来的，twelve 是从 twalib（余 2）来的，也仍然是以十进制为基础，但现在已经是无法区别，决不能说成 ten-one，ten-two。

在这一点上日语就合理得多。掌握了合理的数词会多么有利呢？这

就不得而知了。总之“九九”表很好地利用了日语数词的规律性，用欧洲语言可就非常困难了。

1.11　六 十 进 制

要是 20 太大的话，60 就更大了。而以这更大的 60 为基础，把六十进制付诸实际使用的却是巴比伦王国。

巴比伦王国的六十进制现在在时间和角度的测量上仍然保留着。60 秒是 1 分，60 分是 1 小时，在角度上就是 1 度。这对于使用十进制的我们来说不太方便，可是要改变它与其说是困难的还不如说是不可能的。如果改变，那现在使用的钟表就全都没用了，刻着角度的机械也全都要返工改造。这个改革比起实行米制要困难得多。似乎不值得付出牺牲去实行。无论如何，钟表和分度器上的六十进制会永存下去。

可是六十进制为什么会在巴比伦王国产生呢？道理还不清楚，有各种各样的说法，下面一种说法似乎最说得通。巴比伦王国是由许多小的部落逐渐扩大形成的一个国家。那时有必要把各地方纷杂的度量衡统一起来。所以有很多约数的 60 就很方便。如十进制的国家和十二进制的国家一起组成新的国家时，如果用 10 或 12 都能除尽的数，也就是以 10 和 12 的最小公倍数 60 为基础的话，对两国都合适。

1.12　定位与 0 的祖先

巴比伦王国和埃及是历史上最早的城市国家，在那里文明的发达程度差不多相同，数学水平也很相近。它们掌握了 100 万或 1000 万以内的数词，知道加减乘除的计算方法，还提出了分数的想法。但是也有些不同点。

埃及在实现完整的十进制方面是先进的。巴比伦王国创立的是混杂着十进制的六十进制，因此我们得到一份不值得感谢的遗产，这就是时间与角度的六十进制。即使这么说，巴比伦王国的数学也不是在所有方面都比埃及差。巴比伦记数法的长处究竟在哪里呢？

像前面说过的那样，埃及人对于 1，10，100，1000，…每一个新的

单位想出一个新的文字。

可是巴比伦人分别用Y，<，Y≻来表示 1，10，100，1000 意味着 10×100，所以写成<Y≻。我们可以认为在<与Y≻之间省略了×（乘）的符号。同样，<<Y≻表示 10×10×100＝10 000，<<<Y≻表示 10×10×10×100＝100 000。这虽然只是数字，但其中隐含着重要的想法。这个想法就是把尽量少的数字组合在一起来表示尽可能大的数。节约数字的想法逐渐发展，发明了 0，诞生出计算用的数字，成了今天人类的共同财富。就是这些计算用的数字，按照定位的原理，仅用 10 个数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 的排列，就能够表示所有的数。

埃及人为什么不节约数字呢？原因不太清楚，也许这个原因会出乎意料地出现在我们身边。埃及人能够在纸莎草纤维制成的草纸上画精巧的图画。当有必要写出相当于 1000 万的数字时，能够轻而易举地画出这样的图形文字。而巴比伦人却办不到，他们的纸就是黏土，笔就是在黏土上刻记号的粗陋的刮棒（见图 1-16），用刮棒充其量也就是刻出一些楔形沟。所以要像埃及人那样把 1000 写成等等真是太难了。巴比伦人必须想办法找窍门，用简单的楔形沟的组合写出 1000，这样不就产生了<Y≻吗？总而言之，也许是因为他们用粗陋的刮棒和黏土，使他们不得不节约数字吧。

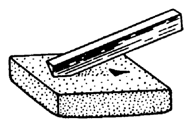


图　1-16

可是反过来说，这件事对于数学的发展却是幸运的。实际上，从 0 的发明到创造计算用的数字，这一发展的线索不是联系在埃及系统，而是联系在巴比伦系统的数学上。

如果是使用方便的草纸使埃及的数学停止发展，而不方便的黏土却给巴比伦数学的发展以很好的刺激，这可以说是历史的讽刺吧。

第 2 章　离散量和连续量

2.1　多少个和多少

可以说“这个筐里有多少个苹果”，而不能说“这个桶里有多少个水”，对于水只能说多少而不能说多少个。这样，多少个和多少之间就有了明显的区别。

苹果是一个个分离、独立存在的，像这类东西（数学上称作集）在数数目的时候，回答是多少个，这类东西就称作离散量。例如，人群、鸟群、棍子捆，全都是离散量，因为这些都是一个个相互分离的。在数离散量时总是说 1，2，3，…，称为自然数或正整数。

与数多少个的离散量相比较，像测量水有多少这样的量就称作连续量。因为桶里的水不是一个个分离的，而是连续变化的。

水无论分到多么细小也是水，是不会变的。还有，当把两个桶里的水倒在一起，仍然是连续的水，看不到有接缝的地方。

像这样能够自由地分开和结合的东西就称为连续量。然而，离散量和连续量的区别也并不是绝对的。例如，我们说多少米的布料是连续量，但若将其缝制成人们所穿的西装，就必须考虑它已成为离散量了。另外，俄国有一个故事说：“有位老奶奶要给三个孙子分吃两个土豆，因为不好分割，就把土豆做成了汤，分给三个孙子喝了。”老奶奶是把离散量的土豆，变成了连续量的土豆汤，从而解决了难题。

在人类靠摘取树木的果实和猎取野兽来维持生活的时候，只数离散量就足够了，不会产生什么差错。在数树木的果实和野兽这样的离散量时，就说 1，2，3，…自然数就行了。后来随着农业和畜牧业的发展，集体活动和集体生活的兴盛，就有了考虑连续量的要求了。假定有 10 个人捕获了 7 只鹿，当需要把 7 只鹿的肉分成相等的 10 份的时候，或

者需要用鹿肉去交换其他东西的时候，自然就产生了考虑分割连续量的问题了。另外，像谷物的量、田地的面积、道路的里程等都是需要知道的，而这些都是连续量。

2.2 用单位测量

离散量要数，连续量要测量。然而，这里所说的测量步骤应如何进行呢?

两个离散量的大小是可以直接进行比较的。例如，为比较一束花的花数和花瓶数哪个多，可以在每个花瓶中插一枝花，余下哪一方就可说哪一方多。然而，作为不可数的连续量就不能这样做了。例如，当比较两根棍子的长度时，首先最简单的比较方法，就是直接并排起来进行比较，然后再确定长出来的部分有多长。但是，有些东西不能像这样进行直接比较。例如奈良大佛的大拇指与镰仓大佛的大拇指是不能如此比较哪个长的。在这种场合，必须找到一个间接的比较方法。可以选择一根小棍，看看拇指是它的多少倍，这也是一种比较。如果一方是小棍长的5倍，另一方是小棍长的3倍，我们就可以断定是比小棍长5倍的那个拇指长。这根小棍就是用来作间接比较的中间一方。因此，这根小棍的长度就成了长度的单位。

可以说在直接比较不方便的地方，就有了间接比较的需要，又由于间接比较的需要，而产生了单位。像重量、体积都是如此，尤其是钱更为明显。当初人类还没有货币时是进行物物交换的，用三个瓜与五个苹果进行交换，可以说这是一种方法，是价值的直接比较。由于这样的直接比较太麻烦，就出现了以贝壳和羊皮作中间物进行的间接比较和交换。此时，贝壳、金属都成了衡量价值的尺度。

由于以贝壳为单位只能在一个部落里通用，而在更大的范围里就不能通用，因此通用单位的金属货币就应运而生了。

例如对于估价为100日元的商品，在头脑中就会按每一日元把商品分成100等份。还有测量一根绳子是50厘米，就相当于分成50等份。所以说测量是离不开分割的。

古时候，中国有个很有名的“曹冲称象”的故事。

称象的方法是先把象拉到船上，在吃水线处作好标记，随后把象牵下船，再把小石头装上船，使船下沉到有标记的地方。这样可以每次用秤称少量的石头，按照加法进行计算，从而整个象的重量就称出来了。

这样做能代替分割象，由于用和象的重量相等的小石头代替象，所以分开称石头，结果就和分割象是一样的。要测量从此地到邮筒的路长，若无尺时，则可利用步幅来测量（见图 2-1）。所谓用步幅测量就是从路长中扣除每一步的步幅，直到剩下零头为止。如能扣除 100 次，就可回答说是 100 步。这样就把本来是连续量的道路长度分割为步幅，即把连续量变成了离散量。

因此，测量连续量只有建立在数离散量的方法上才有可能。人类的祖先很早就是从数离散量 1，2，3，4，…开始计数的，孩子们也是从数像小石子和玻璃球一类的离散量开始建立数的概念的。测量水、牛奶和粉之类的连续量，后来也成为可能的了。

图 2-1

然而，在把连续量分割成离散量时，产生了一个困难，这就是存在零头的问题。用 1 米的尺来量金属丝的长度时，恰好量到头大约是不可能的，在大多数情况下要剩下不够 1 米的零头。若用 1 米来量，量了 4 次后剩下了零头，此时该怎样量下去才好呢？其方法有二。第一个方法是制作比 1 米小的单位，再用此单位量剩下的零头。

如果这个单位是 1 米的 1/10，即 1 分米，若用此单位量了 7 次，那么零头就有 7 分米，金属丝的全长就是 4 米零 7 分米。如果仅用米来表示，就是 $4\frac{7}{10}$米，也可用小数表示为 4.7 米。

量到这里如果还有余下的零头，可进一步用 1/100 米即 1 厘米来量，若量得结果为 2 厘米，那么全长就是 4.72 米。

如此，每当有余下的部分时，就将尺度再细分 1/10，这样就成了一个多位小数，例如 4.7253…米。

照此，将尺细分下去，所出现的数就是小数。然而，还有另一种方法，那就是在没有尺的时候，使用金属丝一起进行交替细分的方法。

试用 1 米的尺来测量金属丝，结果有 2 米和若干零头，如果要知道这个零头是 1 米的几分之一，就必须用该零头来分割 1 米的长度，若分了 3 次，那么零头就是 1/3 米，可以说全长就是 $2\frac{1}{3}$ 米（见图 2-2）。

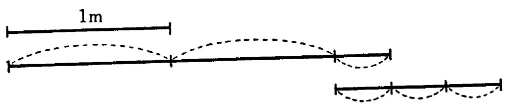


图　2-2

如果量了 3 次之后还有零头，可再用零头来分割 1/3 米。传说这个方法是古代希腊的木匠使用过的。注意用这种方法测量时，结果是分数。

2.3　连续量的表示方法

两只狗和三只狗加在一起是几只狗？孩子们会立刻画出狗来计算（见图 2-3）。

图　2-3

然而渐渐地，随着画的进展，觉得用这种方法计算不需要画狗的腿和尾巴，于是就想到只用简单的符号就行了（见图 2-4）。

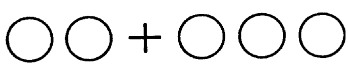


图　2-4

进一步懂得了，不仅狗，连苹果、人都能用同样的符号来表示（见图 2-5）。

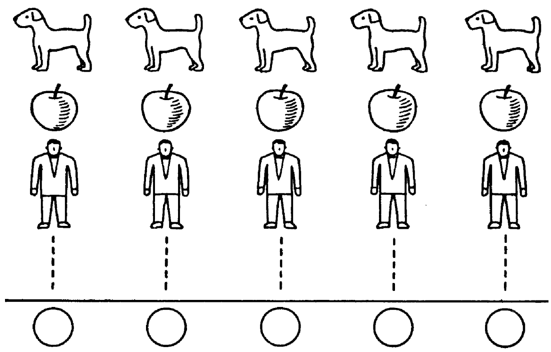


图 2-5

即懂得为了表示离散量，最易画的是○，这是最合适不过的了。

但是，用○来表示连续量，不论怎样考虑都是不合适的。用…来表示倒入桶中的三升水也是不合适的，因为水是连续的。

表示连续量必须考虑其他方法，想出这种方法的人就是笛卡儿。他想出了用直线的长度来表示所有的连续量：

“……最后必须了解，在连续量的各种量纲中，显然比长度和宽度更清楚的东西是不存在的……”

连续量，除了长度以外，还有重量、面积、体积、时间、密度、温度、款额等，可以说种类很多。这些全部都用长度来表示，不能不说笛卡儿的想法是非常大胆的（见图 2-6）。

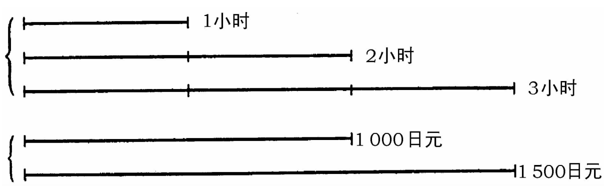


图 2-6

的确，用长度来表示的话，连续量所具有的重要特性就会鲜明地表达出来。

首先就是不论多少都能分割，而直线的长度确实不论多少都能分割（见图 2-7）。

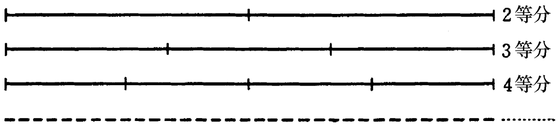


图 2-7

其次，也能自由地结合到一起（见图 2-8）。

图 2-8

再次，能够很容易地比较大小（见图 2-9）。

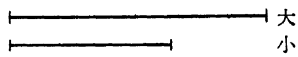


图 2-9

虽然形状不同的杯子里的水的体积是不容易比较的，但是如将体积转换成长度，立刻就可以进行比较。具体地说来，只要看一下水倒进米制量杯后的变化就会明白。米制量杯本来就是把体积转换成长度的工具（见图 2-10）。

仔细考虑一下，说量器多半都是把连续量表示成长度的工具，是并不过分的。

例如，杆秤就是把重量转换成有刻度的长度的工具，钟表就是把时间转换成表盘的长度（曲线长度）的机械，还有温度计是把温度这一连续量转换成了长度，汽车的速度计也是把速度这一连续量变成曲线的长度（见图 2-11）。

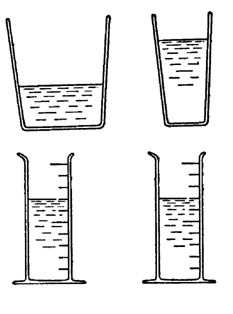


图 2-10

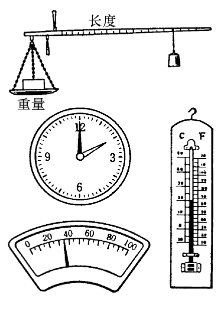


图 2-11

如此考虑“把全部的连续量用长度来表示”这个笛卡儿原则，实际上就是一项伟大的发现。

这件事在另一方面也明显地体现出在数学上的重要性。

歌德曾对数学家作了如下的描述：

“数学家与法国人有些相似。不论向他说什么，他都要翻译成本身的语言，并把它当作完全不同的东西来对待。”

的确，数学家把各式各样的量转换成最容易考虑的长度，它就像世界语一样，具有作为连续量的通用语的作用。

这样，由于笛卡儿把连续量转换为长度，就为坐标图的出现做好了准备。例如，之所以能把某日某患者的体温画在坐标图上，是因为作为连续量的时间和温度能用长度来表示的（见图 2-12）。

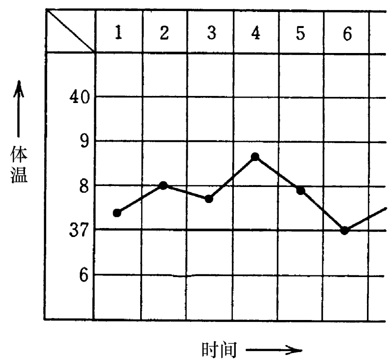


图 2-12

2.4 分数的意义

测量连续量一般总是要剩有零头的，因此其得数就成了分数或小数，即分数和小数是从连续量抽象出来的。因此，计算时应当时时记住它是连续量。

尽管前面已给出提示，但是分数的计算仍是相当困难的。在德语中有句话叫做“in die Brüche gehen”，直译就是“进入分数”，真正的意思是说“道理不明”。之所以这样困难，就是由分数造成的。

的确在分数中困难之处不少。首先分数的意义难以理解。原来分数有以下两个意义。

第一个意义，例如$\frac{2}{3}$可以看作是由两个$\frac{1}{3}$合起来的，即

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

于是$\frac{3}{5}$就是 3 个$\frac{1}{5}$合起来的：

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$$

正像$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{5}$那样，把 1 分为几份的分数，即把分子为 1 的分数叫做单位分数，第一个意义是认为分数是单位分数的集合。用单位分数作为基础进行分数计算的是古代埃及人。

图　2-13

在《莱因德纸草书》中记载着图 2-13所示的一件事，把它翻译过来意思是“用 17 除 2”。如果是在今天，就连小学生都能立刻得出正确的结果：

$$2\div 17=\frac{1}{17}+\frac{1}{17}=\frac{2}{17}$$

然而当时埃及的数学家费了很大的苦心才发现 $2\div 17=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$，其计算的方法是非常复杂的。因此，解答的方法反而变得更困难了。这样他们就得着意考虑单位分数，并且无论如何不会离开这种把不同的单位分数集合成分数的思想方法。阿孟斯也很辛苦地制作并填写了从 2÷3 到 2÷101 的表。

在今天，我想谁也不需要这样的表了吧！原因大家都懂得，是基于这一事实。

$$2\div 5=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$$

$$2\div 7=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$$

…

从阿孟斯的繁琐的表来推测，说不定他们不了解 $2\div5=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$，$2\div7=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$这个规则，因为连分子为 2 时都不知道，在 3 以上时就更不用说了。

$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$是$\frac{3}{5}$的第一个意思，$\frac{3}{5}=3\div5$ 则是$\frac{3}{5}$的第二个意思。

因此，$3\div5$ 可理解为$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$。

知道了这一点，就好往下进行了。试将 3 张纸分成五等份。要是把它们横着排起来分，是难以体现$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$之意义的。因此，可将其稍加整理，使 3 张纸重叠起来再分成五等份。

这样一来，马上就会明白 3 个$\frac{1}{5}$张纸片的道理（见图 2-14）。总之，$3\div5=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$是显而易见的了。

埃及人不了解这一规则，竟白费了力气。这件事就文化的进步来说给了我们有益的教训。文化的进步也不是直线前进的，而是走了很多弯路。不仅如此，甚至走进死胡同长时间出不来的事也是有的。阿孟斯的单位分数表，的确可以说是一个死胡同。

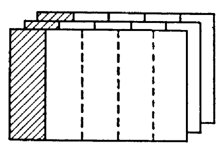


图 2-14

2.5 折叠和扩展

分数的难度也在于其表示的方法。例如整数的表示方法只有一种，像 256，除了写作 256 之外没有别的写法；小数也一样，3.14 除了写作 3.14 以外也没有别的写法。然而，即使是相同的分数，也有各式各样的

写法。例如$\frac{1}{2}$可以写作$\frac{2}{4}$，也可写作$\frac{3}{6}$。虽然内容相同，可外表是不同的：

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\cdots$$

同一个$\frac{1}{2}$之所以能写成许多变化形式，其原因是存在着下述规则：

“分数的分母和分子不论是乘以相同的数，还是除以相同的数，其分数的大小都是不变的。”

为了理解这个规则，可利用纸片说明。例如 1 张纸的$\frac{2}{3}$就是图2－15中画斜线的部分。在这张纸片上画一道横线就分成了小块，一个小块为$\frac{1}{3\times2}=\frac{1}{6}$，而斜线部分的块数为 $2\times2=4$，由于有 4 块就变为占$\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$。然而，由于用横线分割后的斜线部分仍保持原样，所以有

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$$

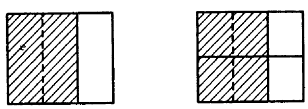
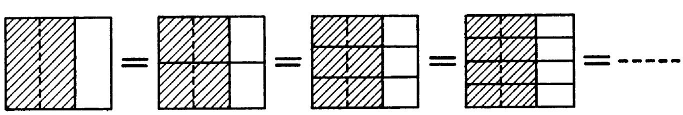


图 2－15

同样，若进行 3 等分，就可成为$\frac{2\times3}{3\times3}=\frac{6}{9}$，继续进行 4 等分、5 等分，就成为图 2－16 所表示的情形。



$$\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{2\times3}{3\times3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\cdots$$

图 2－16

由此就可明白“分数的分母和分子乘以同样的数，其大小不变”这

个道理。另外，如想从$\frac{2\times 2}{3\times 2}$得出$\frac{2}{3}$来，就可将分母和分子都用 2 来除，则其大小仍然不变，将$\frac{4}{6}$的分母和分子都除以 2 得出$\frac{2}{3}$，通常把这叫做约分，即本书中所说的“折叠”。相反，将$\frac{2}{3}$的分母和分子都乘以 2 得到$\frac{4}{6}$，称此为“扩展”。

$$\frac{2}{3}\underset{\text{（折叠）}}{\overset{\text{（扩展）}}{\longleftrightarrow}}\frac{4}{6}$$

无疑，不论“折叠”或是“扩展”，都不会缩小和扩大分数的大小，而仅仅是改变了外形而已。

2.6 分数的比较

比较两个小数，可以一目了然，因为将小数点对齐，若从高位开始进行比较则是很容易看出的。例如若比较 5.382 和 5.3947，立刻就可知道 5.3947 大。

然而，区别分数的大小就相当困难了。例如$\frac{3}{7}$和$\frac{2}{5}$哪个大，难以立即答出。不能简单地区分大小是分数的一项困难。

如果按$\frac{2}{5}$是 $2\div 5$，$\frac{3}{7}$是 $3\div 7$ 来考虑，实际上做除法运算就行了，即有

$$\begin{array}{r}
0.4\\
5\overline{)2\ 0}\\
2\ 0\\
\hline
0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
0.42\\
7\overline{)3\ 0}\\
2\ 8\\
\hline
2\ 0\\
1\ 4\\
\hline
6
\end{array}$$

$$\frac{2}{5}=0.4\qquad\qquad \frac{3}{7}=0.42\cdots$$

这样用小数来比较，就知道$\frac{3}{7}$大。然而由于用除法运算有余数，所

以不能说它是个好方法。

这可以利用正方形纸片来作说明（见图 2-17）。把两张正方形纸片一张竖着分一下，一张横着分一下。让纸片的中间是透明的，把两张纸片重叠起来。这样，一个小块就成了$\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{35}$。从而形成一方为$\frac{2\times7}{5\times7}=\frac{14}{35}$，一方为$\frac{3\times5}{7\times5}=\frac{15}{35}$，我们就知道了$\frac{15}{35}$比$\frac{14}{35}$大。即返回到原状态就是$\frac{3}{7}$比$\frac{2}{5}$大。

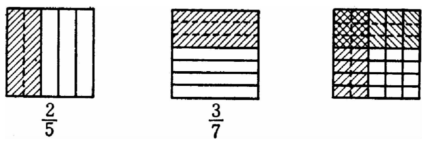


图　2-17

这是在结果中将$\frac{2}{5}$和$\frac{3}{7}$换算成相同的分母，即适当地扩展到 35。写成算式则为

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times7}{5\times7}=\frac{14}{35}\qquad\qquad \frac{3}{7}=\frac{3\times5}{7\times5}=\frac{15}{35}$$

像这样将分数适当地扩展，化成分母相同的分数，就叫做通分。

比较分母不同的分数的大小就是比较通分后分子的大小。

2.7　分数的加法和减法

尽管分数之间的相加稍有困难，但若分母相同就比较简单，例如图 2-18 所示。

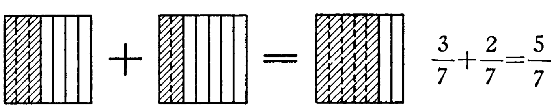


图　2-18

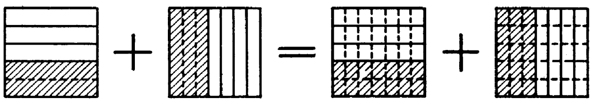
因为$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$和$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$相加，由于有 5 个$\frac{1}{7}$就成了$\frac{5}{7}$，这

不外乎是使分母保持原样，而将分子彼此进行相加，即

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$$

无论什么样的分数只要分母相同，就可以用这种形式来计算，然而难办的是分母不同的情况。

为使$\frac{2}{5}$与$\frac{3}{7}$相加，可采用在比较其大小时所用的作法（见图2-19）。



$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{14+15}{35}=\frac{29}{35}$$

图 2-19

这仍然是将两个分数适当地通分为相同的分母。因此，分数相加也是相当不容易的。为了扩展，需要用乘法，而为找出共同的分母也需用乘法。

减法运算时也和加法时一样，应使其分母化成相等：

$$\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{21-10}{35}=\frac{11}{35}$$

经常出现的错误是在分数相加时，有人就把分母和分母、分子和分子相加起来。

例如，$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$写成$\frac{2+3}{5+7}=\frac{5}{12}$，就把这作为答案了。然而这个$\frac{5}{12}$是比$\frac{3}{7}$还要小的。因为

$$\frac{5}{12}=\frac{5\times7}{12\times7}=\frac{35}{84} \qquad \frac{3}{7}=\frac{3\times12}{7\times12}=\frac{36}{84}$$

所以$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{5}{12}$是毫无道理的。举一个最极端的例子，若用此法计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，就是$\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。也就是，一半加一半等于一半，可以说是得出了一个莫名奇妙的结果。

2.8 乘法的扩大解释

使用乘法的计算有很多。例如，以 1 小时 5 千米的速度步行的人，若走 3 小时，步行了多少千米，其计算就是乘法：

$5\times3=15$

一般情况下有

速度×时间＝距离

这一公式是成立的。不管是时速 1000 千米的喷气式飞机还是时速数米的蜗牛，这一公式都是同样适用的。但是，时间若有零头，就不能使用。原因是若时间是 2 小时零半小时，其计算就成了$\cdots\times2\frac{1}{2}$。$\cdots\times$分数的计算还是不好理解。

同样，1 升单价为 80 日元的酱油，只买 3 升，其总价为

80 日元×3＝240 日元

一般的公式为

单价×数量＝总价

此时，若数量为 1 升半，就变成$\cdots\times1\frac{1}{2}$，故上述公式也不能使用。

遇到这种情形时，采取的态度有两种。一种是由于×就是重复相加，而×分数则与×的本来定义有矛盾，故而拒绝考虑×分数。这是一种保守的态度。另一种态度是为了弄清×分数是什么意思，而将×的意义予以扩充：

速度×时间＝距离

单价×数量＝总价

也就是说，认为连续量×连续量＝连续量的公式在分数的情况下也照样能使用。这同前一种态度相比可以说是进步了。

判断不出这两种态度哪一种是正确的，然而事实上，数学总是按后者进步的态度而发展的。

按第二种考虑方法，×分数的意义究竟是什么呢？现以

速度×时间＝距离

这一公式来考虑一下。

以时速 5 千米走了 $\frac{3}{4}$ 小时，即使不使用公式也能算出行程：

在 $\frac{1}{4}$ 小时为 5 千米 $\div 4$

在 $\frac{3}{4}$ 小时为 5 千米 $\div 4 \times 3$，即除以分母再乘上分子就行了。

因此若规定 $5 \times \frac{3}{4}$ 就是 $5 \div 4 \times 3$，则

速度×时间＝距离

这一公式在分数世界里也是适用的。

换句话说，…的 $\frac{3}{4}$ 也是有意义的。所以下面三种情况的意义相同：

$\cdots \times \frac{3}{4}$ | …的 $\frac{3}{4}$ | $\cdots \div 4 \times 3$

如果像这样来规定乘分数，也可以理解

单价×数量＝总价

这个公式同样能在分数世界里推广使用。例如 1 升单价 80 日元的酱油，计算 $\frac{3}{4}$ 升的总价，则有

$\frac{1}{4}$ 升为 80 日元 $\div 4$

$\frac{3}{4}$ 升为 80 日元 $\div 4 \times 3$

$\cdots \div 4 \times 3$ 与前面所述是相同的。另外，长×宽＝面积，同样在分数世界里也适用。例如，长 5 米，宽 $\frac{3}{4}$ 米的长方形面积（见图 2-20），可以像下面这样来表示：

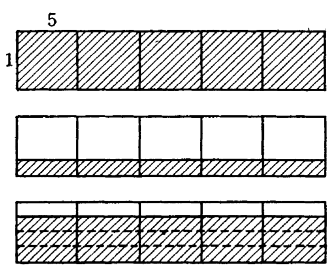


图 2-20

长 5 米，宽 1 米，面积 5 平方米

长 5 米，宽 $\frac{1}{4}$ 米，面积（$5 \div 4$）平方米

长5米，宽$\frac{3}{4}$米，面积（$5\div4\times3$）平方米。也就是，若使$\times\frac{3}{4}$为$\div4\times3$的意思，则

长×宽＝面积

这一公式在分数世界里也是适用的。

虽然上述不过是二三个实例，但由此可以了解，当明确规定了×分数的意义时，×的公式在连续量的世界里照样成立。

听到这些，保守的顽固派是会说三道四的。确实给×分数下了定义会带来很多方便。但是，由于$\times\frac{3}{4}$实质上是$\div4\times3$，即乘1次分数，等于又除又乘两次整数，所以就不必要考虑$\times\frac{3}{4}$了。因为与×的起始的意思混同，所以还是使用别的记号为好。

大概这也是反对论的一番道理吧。然而就是使用旧的×，也没有比这更糟的了。在普通的说法中也有不少与此类似的情况。例如，有过“笔勤”或“笔不勤”的说法，对于使用钢笔和铅笔来说，绝不会说成是“钢笔勤”、“钢笔不勤”。

在这里，笔是被扩大解释为包含了钢笔和铅笔的。因此，尽管数学是定义严格的学科，但在某些场合，可以说也具有灵活的一面。

2.9 乘减少，除增大

如果把×当作扩大来解释，虽然也能定义×分数的意义，但也会产生一些问题。例如乘整数时必定是增大的，但乘分数时就会减小。总而言之“乘就增大”这种通常的说法是不成立的。不用说想出$\times\frac{3}{4}$就是…的$\frac{3}{4}$，即便是感到奇怪，也是理所当然的。这种奇妙的感觉对讲西欧语言的人比对讲日语的人来说更为强烈。因为在多数欧洲语中“乘”同时就是增大的意思。例如英语中的multiply、法语中的multiplier，德语中的vervielfachen，俄语中的умножить等皆是。

18世纪的大数学家欧拉对这个解释似乎也感到难办，曾说过：

“如果整数或分数乘以分数，其得数比被乘数小，无论如何这与乘法的性质是矛盾的。乘法若按其名称来判断，则意味着增大或增加。”

旧约圣经里的“Be fruitful，and multiply”就是“产生吧！增殖吧！”因此对 multiply 也会减少是难以理解的。

然而有幸的是日语的“乘”没有“增大”的意思，因此欧拉的疑问不知不觉地就解决了。当减价时与其说打 8 折等，莫如直说减少的价钱更好。

在这一点上是按照近代日语来说的。

因为在日语里“乘”没有增大的意思，所以日本人和欧洲人一样，乘上$\frac{2}{3}$得数减少这一点也是在不知不觉之中得到了解决。但是对于除法就不能那样说了。即使是日本人，对于除是增大也是难以想象的，这是不能在不知不觉中解决的。

为了解答这种疑问，联想起来对于除法是有两种意思的。也就是平均分割和包含分割。

首先，若将除分数考虑为包含分割，就会消除除是增加这一疑问。

如果把 3 米长的绳，分割为$\frac{1}{2}$米即 50 厘米长的绳，能分成多少根，试思考一下这一问题（见图 2-21）。

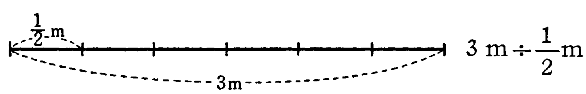


图 2-21

若写出公式并以米为单位就是 $3\div\frac{1}{2}$，答案很明显为 6，即

$$3\div\frac{1}{2}=6$$

3 被除以后虽然增大到 6，但像这样，若将除法 3 米÷$\frac{1}{2}$米看成是包含分割是不难想象的。

这里暂把÷分数考虑成包含分割，来推导一下计算的方法。

试考虑把 6 米长的金属丝剪成$\frac{2}{5}$米长的小段，能剪多少根。如用运算式写出就是 6 米$\div\frac{2}{5}$米，省略单位米即为

$$6\div\frac{2}{5}$$

这样的计算，一次不好完成，可用两次来完成。

首先，剪成 2 米长的金属丝。即 6 米÷2 米＝3，能够分成 3 根（见图 2-22）。

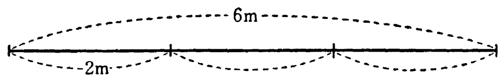


图 2-22

接着若将 2 米长金属丝再分为 5 等份，每份就成了$\frac{2}{5}$米长的金属丝了，因为是 3 根的 5 倍就是

$$3\times5=15$$

按照最初的计算就是

$$6\div2\times5=15$$

也就是用分子的 2 来除，再乘上分母的 5。

这不限于$\div\frac{2}{5}$，对什么样的分数都是这样，所以，若使其一般化，则有下列规则：

“除以分数时，就是除以分子，乘上分母。”

$$\cdots\div\frac{分子}{分母}=\cdots\div分子\times分母$$

因此，$\div\frac{2}{5}$与$\times\frac{5}{2}$是一样的，所以就有下述的规则：

“除以分数时，可以乘上将该分数调换分子和分母后的分数。”

$$\cdots\div\frac{\triangle}{\square}=\cdots\times\frac{\square}{\triangle}$$

由此可见，若将÷分数考虑为包含分割就能够很自然地加以想象。

但对平均分割的方法该如何考虑呢?

例如，12 是几的 3 倍，这个问题就是 $12\div3$ 的平均分割问题；12 是几的 $\frac{2}{3}$，把这个问题考虑为 $12\div\frac{2}{3}$ 的平均分割也是合适的。这也和包含分割的情况相同，可分成两步考虑。

首先 12 是几的 2 倍?

$12\div2=6$

6 又是几的 1/3?

$6\times3=18$

按照最初的计算，则有

$12\div2\times3=18$

也就是说 12 应是 18 的 $\frac{2}{3}$。

此种计算与包含分割的情况一样，除以分子的 2 乘以分母的 3。

也就是说 $\div\frac{2}{3}$ 变成了 $\times\frac{3}{2}$，不论是包含分割还是平均分割都是相同的。

如上所述，×分数、÷分数的规则就是变成整数的两次计算。这个规则一旦被确定之后，考虑分数的一次计算，就可以此为基础向前迈进。数学进步的秘密就在这里。

2.10 小数的意义

小数就是拿 10，100，1000，…特殊的数作分母的分数。虽然从理论上说确实如此，但在认识上却颇费周折。

所谓测量长度和重量等连续量，就是看它是单位量的多少倍。但往往是有零头的，出现零头时的处理，前面有两处已叙述过了。

那就是以余量为基础去除单位量。如果单位量是余量的 5 倍，我们就可以知道余量是单位量的 $\frac{1}{5}$，这就是对分数的考虑方法。而将单位量进行细分就是小数的考虑方法。将单位量分成十等份，用此去除余量，